

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN34A : Optimización
Profesores: Natalia Yanković - Guillermo Durán
Patricio Conca - Patricia Zimmerman
Auxiliares: Alejandro Cataldo - Giovanni Medina
Francisco González - Sebastián Souyris

Pauta Control #3

DURACIÓN: 2 HORAS 30 MINUTOS.

Pregunta 1

Sea el problema:

$$\begin{aligned} \text{máx } z &= 3x_1 + 5x_2 \\ \text{s.a :} \quad & \\ & x_1 \leq 4 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ & x_j \geq 0 \end{aligned}$$

Se agregan las variables x_3 y x_4 como variables de holgura a la primera y segunda restricción respectivamente.

Se sabe que las variables básicas en el óptimo son x_2 y x_3 . Con estos antecedentes responda:

1. (2 PUNTOS) Suponga que $c_2 = 5$ se cambia por $c_2 = 2,5$. A partir de los antecedentes entregados determine si la solución óptima se mantiene o no. En caso de no mantenerse la solución óptima encuentre la nueva solución óptima.

Solución: De la información entregada se sabe que x_2 es una variable básica, luego sabemos que al cambiar el costo de una variable básica en la solución óptima cambian los costos modificados (reducidos) de las variables no básicas en la última forma canónica (iteración en la cual se cumple optimalidad) y el valor de la función objetivo, luego es necesario verificar el criterio de optimalidad para ver si la solución óptima se mantiene.

En el óptimo las variables básicas son x_2 y x_3 , luego la base queda:

$$B^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow B^{*-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Los nuevos costos modificados serán (sobre las variables no básicas, y entonces x_1 y x_4):

$$\bar{c}_j = c_j - c_B B^{*-1} A_{\bullet j}$$

$$\bar{c}_1 = c_1 - c_B B^{*-1} A_{\bullet 1} = -3 - (-2,5 \quad 0) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0,75 \geq 0$$

$$\bar{c}_4 = c_4 - c_B B^{*-1} A_{\bullet 4} = 0 - (-2, 5 \ 0) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1,75 \geq 0$$

Luego, a pesar del cambio que se produce en el costo asociado a la variable básica x_2 , el óptimo sigue manteniéndose, para un problema de minimización.

2. (2 PUNTOS) Encuentre la variación que puede experimentar $b_2 = 18$ de manera que el precio sombra asociado a la segunda restricción no cambie.

Solución: Sabemos que los precios sombras pueden ser calculados como $y^* = \pi^* = c_B B^{*-1}$. Como en este caso no se está modificando ningún costo del problema original, la única forma en que el valor de algún precio sombra puede variar es cambiando la base óptima. Para asegurar que seguimos estando en el mismo óptimo, y entonces no cambia la base, solamente se necesita asegurar que seguimos estando en un punto factible en el problema primal, lo cual se asegura haciendo que $\bar{b} = B^{-1}b$ cumpla con la condición de naturaleza de variables explicitada en el problema, las que en este caso corresponde a $x_j \geq 0$ para todo j .

Ahora, veamos cual es el rango en que puede variar b_2 para que sigamos estando en el mismo óptimo:

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b_2}{2} \\ 4 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego, cualquier valor de $b_2 \geq 0$ no provoca que cambie la base óptima, y por lo tanto el precio sombra asociado a la segunda restricción no cambia.

3. (2 PUNTOS) Suponga que $b_2 = 18$ se cambia por $b_2 = 9$. Analice si cambian o no los valores de las variables duales y sus costos modificados en el óptimo.

Solución: En la parte anterior se demostró que cualquier valor positivo de b_2 no produce ningún cambio en la base óptima y por lo tanto los valores de las variables duales o precios sombra no cambian. En caso que existan cambios, entregue los nuevos valores sin resolver el problema dual. El nuevo lado derecho queda en este caso:

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ 4 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Con esto, los valores de las nuevas variables en el óptimo son $x_1^* = 0$, $x_2^* = \frac{9}{2}$, $x_3^* = 4$ y $x_4^* = 0$, los cuales corresponden a los costos modificados nuevos de las variables en la última forma canónica del dual.

Pregunta 2

Sea el siguiente problema primal (P):

$$\begin{aligned} \text{máx } z &= cx \\ \text{s.a :} \\ Ax &\leq b \\ x_i &\geq 0 \end{aligned}$$

y su correspondiente dual. Dado esto, responda las siguientes preguntas.

1. (3 PUNTOS) ¿Pueden ser el problema primal y el dual no acotados? En caso de que su respuesta sea afirmativa, de un ejemplo y justifique porque no son acotados. En caso que la respuesta sea negativa demuéstrela.

Solución: Utilizando el teorema débil de dualidad es posible demostrar que si uno de estos problemas es no acotado el otro tiene que ser infactible. Sabemos que para un problema de maximización $z(x) \leq w(y)$, siendo $z(x)$ la función objetivo del primal evaluada en algún x factible y $w(y)$ la función objetivo del dual evaluada en algún y factible. Ahora, si asumimos que ambos problemas pueden ser no acotados estamos diciendo que ambos problemas son factibles y que no tienen cota para el valor de sus respectivas funciones objetivo. Matemáticamente para el problema planteado (maximización) no acotado es:

$$\exists M \text{ tal que } z(x^M) > M$$

$$\exists Q \text{ tal que } w(y^Q) < Q$$

Ahora, si asumimos que ambos son factibles (una de las condiciones para que sean no acotados) se tiene que:

$$z(x) \leq w(y)$$

y en particular

$$z(x) \leq \min w(y)$$

pero por la definición de un problema no acotado sabemos que siempre podemos encontrar un Q tal que $w(y)$ sea menor que Q , luego necesariamente si el dual es no acotado entonces el primal debe ser infactible.

2. (3 PUNTOS) ¿Pueden ser el problema primal y el dual no factibles? En caso de que su respuesta sea afirmativa, de un ejemplo y justifique porque son infactibles. En caso que la respuesta sea negativa demuéstrela.

Solución: La respuesta correcta es que es posible que tanto el primal como el dual sean infactibles, por lo tanto es necesario dar un ejemplo. Un ejemplo puede ser:

$$\text{máx } z = x_1 - 2x_2$$

s.a :

$$\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 & \leq & 1 \\ -x_1 + x_2 & \leq & -2 \\ x_i & \geq & 0 \end{array}$$

Problema que es infactible puesto que se deben cumplir las siguientes condiciones: $x_1 \leq 1 + x_2$ y $x_1 \geq 2 + x_2$, lo cual no es posible para algún valor de x_1 y $x_2 \geq 0$.

El dual de este problema es:

$$\text{mín } w = y_1 - 2y_2$$

s.a :

$$\begin{array}{rcl} y_1 - y_2 & \geq & 1 \\ -y_1 + y_2 & \geq & -2 \\ y_j & \geq & 0 \end{array}$$

Problema que es infactible puesto que se deben cumplir las siguientes condiciones: $y_1 \geq 1 + y_2$ y $y_1 \geq 2 + y_2$, lo cual no es posible para algún valor de y_1 e $y_2 \geq 0$.

NOTA: Cabe destacar que este es solo uno de los posibles ejemplos que responden la pregunta. Lo importante en él es darse cuenta que ambos problemas son simétricos, o sea, $c = b$ y $A = A^T$.

Pregunta 3

Suponga que usted es el dueño de la fabrica de viagra *Mandinga no puede*, y sabe que debe satisfacer la demanda que enfrenta para los próximos T meses. Esta demanda la ha estimado en D^t unidades para el mes t .

Actualmente la empresa presenta los siguientes costos de producción:

- Un costo fijo de K para cada mes.
- Un costo unitario de producción de c^t para cada mes.

Además, cuenta con una capacidad máxima de producción de Q_m unidades igual para todos los períodos, y en cualquier período puede decidir cambiar la tecnología de producción que está siendo utilizada, lo cual modificará los costos unitarios de producción a c_a^t , con $c_a^t < c^t$, y la capacidad máxima de la empresa a Q_m^t . La implantación de esta nueva tecnología obliga a la empresa a incurrir en un costo de I .

Cabe destacar que una vez que se ha realizado el cambio tecnológico no es posible regresar a la tecnología original, la inversión es realizada una única vez y que el producto no se puede almacenar en bodega.

Adicionalmente, usted posee convenios con la competencia que le permiten comprar unidades de producto terminado a un precio de P , con $P > c^t$ para todo t . Con esta información responda:

1. (4 PUNTOS) Formule un modelo de programación lineal entera mixta que permita determinar las acciones que se deben realizar a lo largo del período de planificación con el fin de minimizar los costos en que debe incurrir la empresa para satisfacer la demanda.

a) **Variables:**

α^t : 1 si se decide producir en el mes t , 0 sino.

x^t : cantidad de unidades producidas con la tecnología antigua en el período t .

w^t : cantidad de unidades producidas con la tecnología nueva en el período t .

β^t : 1 si se decide cambiar la tecnología en el período t .

y^t : cantidad de unidades compradas a la competencia.

b) **Función Objetivo 0.5 punto:**

$$\text{mín Costos Totales} = \sum_{t=1}^T K\alpha^t + \sum_{t=1}^T Py^t + \sum_{t=1}^T c^t x^t + \sum_{t=1}^T c_a^t w^t + \sum_{t=1}^T I\beta^t$$

c) **Restricciones:**

1) Cambiar a lo más una vez de tecnología en el horizonte de evaluación **0.4 punto**.

$$\sum_{t=1}^T \beta^t \leq 1$$

2) Satisfacer la demanda **0.4 punto**.

$$x^t + w^t + y^t \geq D^t \quad \forall t = 1, \dots, T.$$

3) Producir solamente si se decide hacerlo **0.5 punto**.

$$M\alpha^t \geq x^t + w^t \quad \forall t = 1, \dots, T.$$

con

$$M = D^t$$

4) No sobrepasar capacidad con tecnología antigua **1 punto**.

$$x^t \leq Q_m \left(1 - \sum_{\theta \leq t} \alpha^\theta \right) \quad \forall t = 1, \dots, T.$$

5) No sobrepasar capacidad con tecnología nueva **1 punto**.

$$w^t \leq Q_m^t \sum_{\theta \leq t} \alpha^\theta \quad \forall t = 1, \dots, T.$$

6) Naturaleza de las variables **0.2 punto**.

$$\alpha^t; \beta^t \in \{0, 1\} \quad \forall t = 1, \dots, T.$$

$$x^t; y^t; w^t \geq 0 \quad \forall t = 1, \dots, T.$$

2. (2 PUNTOS) ¿Cómo cambia su respuesta si ahora se permite realizar inventario de productos, asumiendo que el costo asociado de b^t por unidad almacena desde el período t al $t + 1$, y un inventario máximo de B unidades?

En caso de que pueda manejarse inventario entre períodos es necesario agregar una nueva variable:

I^t : cantidad de inventario guardada desde el período t al período $t + 1$.

Las restricciones de satisfacción de demanda (2) y de naturaleza de variables se modifican quedando:

0.5 punto

$$x^t + w^t + y^t + I^{t-1} \geq D^t + I^t \quad \forall t = 1, \dots, T.$$

0.5 punto

$$\alpha^t; \beta^t \in \{0, 1\} \quad \forall t = 1, \dots, T.$$

$$x^t; y^t; w^t; I^t \geq 0 \quad \forall t = 1, \dots, T.$$

Además, se debe agregar la restricción sobre la capacidad máxima de bodegaje en cada período:

0.5 punto

$$I^t \leq B \quad \forall t = 1, \dots, T.$$

Por último, la función objetivo se modifica quedando:

0.5 punto

$$\text{mín Costos Totales} = \sum_{t=1}^T K\alpha^t + \sum_{t=1}^T Py^t + \sum_{t=1}^T c^t x^t + \sum_{t=1}^T c_a^t w^t + \sum_{t=1}^T I\beta^t + \sum_{t=1}^T b^t I^t$$

Dudas, consultas y comentarios a Alejandro Cataldo Cornejo:
acataldo@ing.uchile.cl